République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement
Supérieur et de la Recherche Scientifique

ENIG

Université de Gabès
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès
Département Génie Electrique-Automatique

Cours Analyse Numérique

Réalisé par : DEHRI Khadija

Maitre Assistante en Génie Electrique-Automatique

Membre de Laboratoire de Recherche
Commande Numérique des Procédés Industriels (CONPRI)

Plan

Plan

Cours AN

- Opérations sur les matrices et notations préliminaires
- Méthodes directes pour la résolution des systèmes linéaires
- Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires
- Résolution numérique des équations non linéaires
- Interpolation polynomiale
- Dérivation et intégration numérique
- Résolution numérique des équations différentielles

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Rappels mathématiques

Vecteur *x*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

En matlab $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $x = [1;2;3]$ ou $x = [1 \quad 2 \quad 3]'$

Vecteur transposé $x' = (x_1 \quad \cdots \quad x_i \quad \cdots \quad x_n)$

Somme $z = x + y$ $z_i = x_i + y_i$

Produit scalaire

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},\ x/y = \langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

vecteurs orthogonaux $\{ y \in R^n \mid \langle x, y \rangle = 0 \}$

3

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Rappels mathématiques

Définition d'une fonction linéaire

$f : \ \Re^n \to \Re^n$

$x \ \mapsto y = f(x)$

f est linéaire ssi : $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$

Soit $u_1, u_2, \ldots, u_m$ un ensemble de m vecteurs de $\Re^n$

$u_1, u_2, \ldots, u_m$ sont dits linéairement indépendants

$\Leftrightarrow \exists\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \Re$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_m u_m = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$

$u_1, u_2, \ldots, u_m$ sont dits générateurs de $\Re^n$

$\Leftrightarrow \forall x \in \Re^n,\ \exists\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \Re$ tel que $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_m u_m$

$u_1, u_2, \ldots, u_m$ sont dits une base de $\Re^n$

$\Leftrightarrow u_1, u_2, \ldots, u_m$ sont à la fois linéairement indépendantes et générateurs de $\Re^n$

$f : \ \Re^n \to \Re^m$

$x \ \mapsto y = f(x)$

$\exists!\ (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \in \Re$ f est une fonction linéaire $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

4

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Rappels mathématiques

$y = f(x) = Ax \qquad A \in \Re^{m \times n}$

$$\Leftrightarrow A = \left[a_{ij}\right]_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A est la matrice associée à la fonction f

En matlab $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$A = [1\ 2; 3\ 4]$

ou $A = [1\ \ 3; 2\ \ 4]'$

Opérations élémentaires sur les matrices

Somme : soient A et B deux matrices de même taille $\qquad C = A + B; \qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$A \in \Re^{m \times n} \qquad C \in \Re^{m \times n}$

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & -3 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \\ 8 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad B \in \Re^{m \times n}$$

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & -3 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix};$$

5

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Opérations élémentaires sur les matrices

Produit :

soient A et B deux matrices avec $\qquad A \in \Re^{m \times n} \qquad B \in \Re^{n \times p}$

nombre de colonnes de A = nombre de lignes de $B = n$

$C = AB; \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad C \in \Re^{m \times p}$

C a autant de lignes que A et autant de colonnes que B

AB n'est pas BA (non commutatif)

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 10 & 5 \\ 13 & 10 & 8 & -13 \end{bmatrix};$$

Composition des applications linéaires

$$R^m \xrightarrow[f_1, B]{} R^n \xrightarrow[f_2, A]{} R^p$$

$$R^m \xrightarrow[f = f_2 \circ f_1, C = AB]{} R^p$$

6

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Opérations élémentaires sur les matrices

Matrice identité :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matlab eye(n)

Transposée (adjointe pour les complexes)

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m\times n} \quad \text{alors } A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{n\times m}$$

Propriétés

(1) $(A^T)^T = A$

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(3) $(\alpha A)^T = \alpha(A^T)$

(4) $(AB)^T = B^T A^T$

***A* est symétrique ssi** $A^T = A$

***A* est anti-symétrique ssi** $A^T = -A$

7

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Opérations élémentaires sur les matrices

Matrices particulières:

Matrice carrée :

On appelle matrice carrée d'ordre n, toute matrice A ayant n lignes et n colonnes.

$$A = \left[a_{ij}\right]_{1\le i\le n, 1\le j\le n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots\ldots, a_{ii}, \ldots\ldots\ldots, a_{nn}$ sont les termes de la diagonale principales de la matrice *A*.

Matrice diagonale :

On appelle matrice diagonale d'ordre n, toute matrice dont les éléments en dehors de sa diagonale principale sont nuls :

$$a_{ij} = 0, \forall i \neq j \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

8

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Opérations élémentaires sur les matrices

Matrice triangulaire :

On appelle **matrice triangulaire supérieure**, toute matrice carrée dans laquelle les éléments situés au dessous de la diagonale principale sont nuls; c'est à dire:

$$a_{ij} = 0, \forall i > j, 1 \le i \le n, 1 \le j \le n$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

On appelle **matrice triangulaire inférieure**, toute matrice carrée dans laquelle les éléments situés au dessus de la diagonale principale sont nuls; c'est à dire:

$$a_{ij} = 0, \forall i < j, 1 \le i \le n, 1 \le j \le n$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Si ***A* et *B* sont deux matrices triangulaires** supérieures (respectivement inférieures) d'ordre n alors, **(*A* + *B*) et (*A*.*B*) sont aussi des matrices triangulaires** supérieures (respectivement inférieures).

9

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Opérations élémentaires sur les matrices

On appelle **matrice adjointe** de $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $A^* = \left[\overline{a}_{ji}\right]_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$

A est dite **orthogonale** $A^T A = A A^T = I_n$

A est dite **hermitienne** $A^* = A$

A est dite **unitaire** $A^* A = A A^* = I_n$

A est dite **bande** ssi $a_{ij} = 0 \; \forall |i - j| > p, 1 < p < n$

A est dite **normale** $A^* A = A A^*$

A est dite **positive** $x^T A x \ge 0 \Leftrightarrow \langle Ax, x \rangle \ge 0, \forall x \in \Re^n$

A est dite positive c'est-à-dire **tout les mineurs principaux de *A* sont positifs**

A est dite **définie positive** $x^T A x > 0 \; \forall x \in \Re^n, x \ne 0_{n \times 1}$

10

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Opérations élémentaires sur les matrices

Inverse d'une matrice

Soit A (n,n) matrice carré, l'inverse de A est noté A^{-1}

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

Pour $A(n,n)$ *si* A^{-1} existe, elle est dite non singulière, sinon A est singulière

Propriétés

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A;$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1};$$

$$\left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} com^{T}(A)$$

Déterminant d'une matrice

A chaque matrice A on fait correspondre un nombre réel, appelé déterminant de la matrice, et noté det (A), ou encore $|A|$. Ce nombre s'obtient à partir des règles de calculs suivantes:

Déterminant d'ordre 2:

Soit la matrice A donnée comme suit : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Le déterminant de A est donné de la façon suivante :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Exemple : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; calculer son déterminant. **det(A) = 11**

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

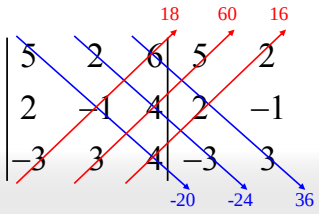
Opérations élémentaires sur les matrices

Règle de Sarrus :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{33}a_{12} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

Exemple : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;



= (-8) - (94) = **-102**

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Opérations élémentaires sur les matrices

Déterminant d'ordre n :

Soit A une matrice d'ordre n tel que: $A=\left[a_{ij}\right]_{1\le i\le n,1\le j\le n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Définitions:

D1- On appelle **mineur** de l'élément a_{ij}, le déterminant M_{ij} d'ordre $(n-1)$ obtenu à partir du déterminant de A en supprimant dans ce déterminant la i^{ème} ligne et la j^{ème} colonne.

Exemple:

Soit A la matrice tel que : $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; déterminer les mineurs $\boldsymbol{M_{32}}$, $\boldsymbol{M_{22}}$, $\boldsymbol{M_{33}}$

$M_{32}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2;\quad M_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2;\quad M_{33}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=9$

D2- On appelle **cofacteur** de l'élément a_{ij}, le nombre $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

Exemple: Pour la même matrice A, déterminer les cofacteurs $\boldsymbol{A_{32}}$, $\boldsymbol{A_{22}}$, $\boldsymbol{A_{33}}$

$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-2;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=2;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=9$

13

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Opérations élémentaires sur les matrices

D3- Le déterminant d'une matrice carrée A d'ordre n est égal à la somme des produits de chaque élément d'une ligne (ou d'une colonne) par son cofacteur.

Si on développe le déterminant suivant la ligne n° i, on a :

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

Si on développe le déterminant suivant la colonne n° j, on a :

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$$

Remarques :

R1- Les deux relations précédentes sont identiques. Le déterminant d'ordre n ne change pas de valeur quelle que soit la ligne ou la colonne suivant laquelle le développement est effectué.
R2- Dans chaque cas, on est ramené au calcul de n déterminants d'ordre (n-1). On applique la même règle pour calculer chacun d'eux et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à des déterminants d'ordre 2.
R3- Pour le calcul de déterminant d'une matrice, il convient de choisir la ligne ou la colonne qui contient un maximum de termes nuls (des zéros).

14

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Opérations élémentaires sur les matrices

Exemple: Soit la matrice A tel que : $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

calculer la déterminant de A en le développant suivant :

1) la 3ème colonne.

2) la 1ère ligne.

Que peut-on conclure?

$$\det(A)=0\times\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}=-13$$

$$\det(A)=2\times\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-(-1)\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+0\times\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-13$$

Cas particuliers :

Le déterminant d'une matrice d'ordre n diagonale, triangulaire supérieure, triangulaire inférieure est égal **au produit des termes constituant sa diagonale principale**

$$\det(A)=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}=a_{11}\times a_{22}\times\cdots\times a_{nn}$$

Exemple:

Soit A une matrice diagonale d'ordre 4 tel que : $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; $\det(A)=21$

15

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Opérations élémentaires sur les matrices

Propriétés : (1) $\det(AB)=\det(A)\det(B)$

(2) $\det(A^T)=\det(A)$

(3) $\det(A)\neq 0 \Leftrightarrow A$ est non singulière

(4) $\det(A^{-1})=(\det(A))^{-1}$

Si les éléments d'une colonne dans une matrice sont tous nuls, alors le déterminant de cette matrice est nul.

Si dans une matrice une colonne est multipliée par un scalaire λ, alors son déterminant est multiplié par ce même scalaire.

Un déterminant ne change pas de valeur si aux éléments d'une colonne on ajoute les éléments d'une autre colonne multipliés par le même nombre

Exemple:

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(A)$= -13 et $\det(B)$= -26

$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(A)=\det(B)=$ -4

16

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Opérations élémentaires sur les matrices

Exemple:

Soit A la matrice donnée comme suit $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & -5 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Calculer l'inverse de la matrice A

$$\det(A) = -17$$

$$com(A)=\begin{pmatrix}-6 & 5 & 19\\ 1 & 2 & -6\\ -1 & -2 & -11\end{pmatrix} \qquad A^{-1}=-\frac{1}{17}\begin{pmatrix}-6 & 1 & -1\\ 5 & 2 & -2\\ 19 & -6 & -11\end{pmatrix}$$

17

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Opérations élémentaires sur les matrices

Trace d'une matrice :

$$(1)\ A\in\Re^{n\times n},\ \text{trace}(A)=tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

$$(2)\ tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$$

$$(3)\ tr(\alpha A)=\alpha tr(A)$$

Rang d'une matrice :

Rang d'une matrice : rang(A)=r(A) est le nombre de maximum des ses lignes (ou colonnes) linéairement indépendantes

$$rang(A)=rang(A^T);\ rang(A+B)\le\min\{rang(A),rang(B)\}$$

18

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Opérations élémentaires sur les matrices

Valeurs et vecteurs propres

Les valeurs propres de A sont **les racines de ou encore les zéros du polynôme caractéristique**

$$\det(A-\lambda I_n)=0 \qquad P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)$$

Soit $A\in M_n(K), \lambda\in K, x\in K^n, x\neq 0_{n\times 1}$

x est dit vecteur propre de A associé à une valeur propre λ $\quad Ax=\lambda x$

On appelle **spectre de A** l'ensemble des valeurs propres de A, noté $\sigma(A)=\{\lambda_i\}_{1\le i\le n}$

On appelle **rayon spectrale de A** , la plus grande valeur propre en module de A, noté

$$\rho(A)=\max|\lambda_i|_{1\le i\le n}$$

Deux matrices **A et B** sont dites **équivalentes** s'il **existe** deux matrices **P et Q** telle que

$$A=PBQ$$

Deux matrices A et B sont dites semblables s'il existe une matrice inversible P telle que

$$A=PBP^{-1}$$

Une matrice A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale

19

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Opérations élémentaires sur les matrices

Théorème de Schur

Pour toute matrice carré A, il existe une matrice unitaire U telle que U^*AU est triangulaire

$$U^*AU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & * & \dots & *\\ 0 & \lambda_2 & \ddots & *\\ \vdots & \ddots & \ddots & *\\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n\end{bmatrix}$$

Normes vectorielles et normes matricielles

La norme d'un vecteur de $\Re^n$ est une application notée $\|(.)\|$ de $\Re^n$ dans $\Re^+$

$\forall u,v\in\Re^n, \alpha\in\Re$

1) $\|u\|=0$ ssi $u=0_{n\times 1}$

2) $\|\alpha u\|=|\alpha|\,\|u\|$

3) $\|u+v\|\le\|u\|+\|v\|$

La norme p d'un vecteur x est définie par (p≥1):

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p} \quad \forall p\ge 1$$

20

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Opérations élémentaires sur les matrices

$$1 - \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad (Manhat\ tan)$$

$$2 - \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad (Euclidean) \qquad \|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$$

$$\infty - \|x\|_\infty = \max_i |x_i| \quad (Chebyshev)$$

L'inégalité de Holder $\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \|x\|_p \|y\|_q \, , p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Pour p=2 : appelée l'**inégalié de Cauchy-Schwartz**

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \|x\|_2 \|y\|_2$$

En matlab : norm(x,p)

21

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Opérations élémentaires sur les matrices

Exemple:

Soit le vecteur suivant : $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

Calculer les normes 1, 2 et infini de *x*

```
x=[3; 4; -1];
n2x=norm(x,2)
n2x=5.0990
n1x=norm(x,1)
n1x=8
nix=norm(x,inf)
nix=4
```

22

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Opérations élémentaires sur les matrices

Soit A une matrice nxm, étant donnée une norme vectorielle,
on appelle norme matricielle subordonnée, la norme matricielle définie par :

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \qquad \|A\| = \max_{x \in R^n, \|x\|=1} \|Ax\|$$

norme de Frobénius : $\|A\|_F^2 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = \mathrm{tr}(A'A)$;

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \; ; \qquad \|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \; ;$$

$$\|A\|_1 = \|A'\|_\infty$$

Théorème : soit A une matrice nxm, alors :

$$\|A\|_2^2 = \rho(A'A)$$

Corollaire : si A est une matrice carrée **symétrique** nxn, alors :

$$\|A\|_2 = \rho(A)$$

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Opérations élémentaires sur les matrices

$$\|Ax\|_2 = \|xA\|_2 = \|x^T Ax\|_2 = \|A\|_2 \,, \forall x \in \Re^n \text{ unitaire}$$

$$\rho(A) \le \|A\|$$

L'application $\|.\|_E : M_n \to \Re^+$ définie par

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{tr(A^* A)} \; \forall A = \left[a_{ij} \right]_{1 \le i,j \le n}$$ est une matrice non subordonné $\forall n \ge 2$

invariante par transformation unitaire :

$xx^* = I_n \Rightarrow \|A\|_E = \|Ax\| = \|xA\|$ et qui vérifie $\|A\|_2 = \|A\|_E \le \sqrt{n} \|A\|_2 \; \forall A \in M_n$

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Opérations élémentaires sur les matrices

Exemple $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ -3 & 1 & -5\\ 1 & -9 & 0\end{pmatrix}$

$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le m}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| = \max(5,12,10) = 12$;

$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}| = \max(8,9,10) = 10$;

$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)}$; $\lambda_1 = 1.92$; $\lambda_2 = 48.75$; $\lambda_3 = 96.32$; $\|A\|_2 = \sqrt{96.32} = 9.81$

$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le m}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| = \max(5,5,5) = 5$;

$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}| = \max(4,7,4) = 7$;

$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)}$;

$$\det(A^TA-\lambda I_3) = \det\begin{bmatrix}9-\lambda & 9 & 8\\ 9 & 11-\lambda & 9\\ 8 & 9 & 9-\lambda\end{bmatrix} = 25-53\lambda+29\lambda^2-\lambda^3$$

$\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 14+3\sqrt{19}$; $\lambda_3 = 14-3\sqrt{19}$; $\|A\|_2 = \sqrt{14+3\sqrt{19}} = 5.2035$

25

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Opérations élémentaires sur les matrices

POSITION DE PROBLÈME

Soit $A\in K^{n\times n}$, une matrice inversible (càd $\det(A)\neq 0$) et b un vecteur de second membre $b\in K^n$.

Notre problème consiste à résoudre un système linéaire de la forme suivante :

$$Ax = b$$

En réalité, la résolution de ce système n'est jamais exacte elle est entachée des erreurs.

Ces erreurs peuvent provenir :

- de mesures ou des calculs pour déterminer les coefficients de A et b
- de erreurs dûes à la représentation des chiffres numériquement sous calculateur (ordinateur)

➡ Donc on ne résout pas véritablement $Ax = b$ mais plutôt :

$$\underbrace{(A+\Delta A)}_{\tilde{A}}x = \underbrace{(b+\Delta b)}_{\tilde{b}}$$

EXEMPLE $12x+5.999y = 8.0002$

26

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Opérations élémentaires sur les matrices

CONDITIONNEMENT

DÉFINITION 1

Le conditionnement mesure la dépendance de la solution d'un problème numérique par rapport aux données du problème (A, b)

DÉFINITION 2

Le conditionnement mesure l'influence d'une perturbation sur la solution du problème.

L'objectif est donc l'estimation des erreurs commises sur la solution :

$$x' = x + \delta x$$

Donc on cherche à évaluer δx où $x' = x + \delta x$ est une solution du système :

$$(A+\delta A)(x+\delta x) = (b+\delta b), \quad x' \in K^n$$

Deux cas différents se distinguent :

- Perturbation sur b
- Perturbation sur A

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Opérations élémentaires sur les matrices

PERTURBATION DE SECOND MEMBRE

On considère le système suivant:

$$A(x + \delta x) = b + \delta b \quad (1)$$

δx et δb sont deux vecteurs de K^n et représentent respectivement des petites perturbations sur x et b.

L'équation (1) se réécrit comme suit:

$$Ax + A\delta x = b + \delta b$$

et comme x est une solution du système $Ax = b$, alors on a :

$$\delta x = A^{-1}.\delta b$$

En appliquant la norme subordonnée on obtient :

$$\|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \le \|A^{-1}\|\|\delta b\| \quad (2)$$

D'autre part on a :

$$\|b\| = \|Ax\| \le \|A\|\|x\|$$

Donc : $$\frac{1}{\|x\|} \le \frac{\|A\|}{\|b\|} \quad (3)$$

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Opérations élémentaires sur les matrices

Les équations (2) et (3) donnent, pour $x \neq 0_n$ et $b \neq 0_n$:

$$\underbrace{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}}_{Er_x} \leq \left(\|A\|.\|A^{-1}\|\right) \underbrace{\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}}_{Er_b} \qquad (4)$$

Er_x et Er_b désignent respectivement l'erreur relative sur x et b

L'équation (4) se réécrit comme suit :

$$\frac{Er_x}{Er_b} \leq \underbrace{\|A\|\|A^{-1}\|}_{\text{Conditionnement de A}}$$

$$cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

Le conditionnement de A est supérieur à 1 :

$$\|A\|.\|A^{-1}\| \geq \|A.A^{-1}\| = \|I_n\| = 1$$

29

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Opérations élémentaires sur les matrices

PERTURBATION SUR LA MATRICE

On considère le système suivant:

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b \qquad (5)$$

ΔA et Δx sont respectivement les perturbations sur A et x.

En suivant la même démarche, on aura :

$$\underbrace{\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|}}_{Er_x} \leq \underbrace{\left(\|A\|.\|A^{-1}\|\right)}_{cond(A)} \underbrace{\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}_{Er_A}$$

$$\frac{Er_x}{Er_A} \leq cond(A)$$

30

Opérations sur les matrices et notations préliminaires

Opérations élémentaires sur les matrices

Propriétés

Soit $A \in K^{n\times n}$, une matrice inversible :

$cond(A) \geq 1$

$cond(A) = cond(A^{-1})$

$\forall \alpha \in K^*, cond(\alpha A) = cond(A)$

$cond_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\mu_n(A)}{\mu_1(A)}$

où $0 < \mu_1(A) < ... < \mu_n(A)$ sont les racines carrées des valeurs propres de A^*A (valeurs singulières de A)

Si A est symétrique, alors :

$$\text{cond}_2(A) = \frac{\max_i |\lambda_i(A)|}{\min_i |\lambda_i(A)|}$$

où λ_i désignent les valeurs propres de A (en module)

Remarques :

* Si $cond(A) \cong 1$ alors A est dite "bien conditionnée"
* Si $cond(A) \gg 1$ alors A est dite "mal conditionnée"

31